Programa de
Funciones Reales

Código/s: 3.16.2

Identificación y características de la Actividad Curricular

Carrera/s:	Licenciatura en Matemática		
Plan de Estudios:	2002	Carácter:	Obligatoria
Bloque/Campo:		Área:	
Régimen de cursado:	Cuatrimestral		
Cuatrimestre:	6º [LM]		
Carga horaria:	105 hs. / 7 hs. semanales	Formato curricular:	Asignatura
Escuela:	Ciencias Exactas y Naturales	Departamento:	Matemática
Docente responsable:	REYERO, Gabriela		

Programa Sintético

Teoría de la medida. Medida de Lebesgue. Teoría de integración. Integral de Lebesgue. Teoremas de convergencia. Medidas producto. Teorema de Fubini Los espacios Lp . Espacios de Banach y de Hilbert.

Asignaturas Relacionadas

Previas:	3.13.1 - Cálculo IV
Simultaneas Recomendadas:	3.12 - Topología, 3.17.2 - Geometría II, 3.18.2 - Modelos y optimización
Posteriores:	4.23.2 - Ecuaciones Diferenciales, 4.20.1 - Análisis Funcional, 4.19 - Taller de Tesina, 4.25.2 - Métodos Matemáticos

Vigencia desde

Firma Profesor	Fecha	Firma Aprob. Escuela	Fecha

Con el aval del Consejo Asesor:

Características generales

Funciones Reales se ubica en el segundo semestre del tercer año de la carrera. Tiene asignada siete horas semanales en las que se desarrollan clases de tipo teórico-práctica. El alumno conoce las propiedades básicas de los espacios métricos, que ha visto ya en la asignatura Topología, que cursa simultáneamente. Se comienza con temas de la teoría de funciones de variable real y de variable compleja: límites, límites superior e inferior, continuidad uniforme, semicontinuidad inferior y superior, para complementar los conocimientos adquiridos en las asignaturas Cálculo I, II, III y IV. Luego se introduce al alumno en el estudio de la teoría abstracta de medibilidad, medida e integración, continuando con el de la medida e integral de Lebesgue en Rn. Se hace luego una introducción al Análisis Funcional, para presentar a continuación los Espacios L^p. Se completa el curso con el teorema de Radon-Nikodym y el teorema de representación de Riesz.

Objetivos

Esta asignatura tiene como propósito general familiarizar al estudiante con los conceptos y métodos básicos de la Teoría de: Funciones Reales, Medibilidad, Medida e Integración, y una introducción al Análisis Funcional mediante el estudio de los Espacios de Lebesgue L^p. Adquirir un adecuado dominio de los mismos, que le permita aplicarlos a la resolución de problemas que los requieran.

En términos de competencias se desea que el alumno logre:

a) Manejar hábilmente las propiedades básicas de los espacios métricos y de la teoría de funciones de variable real y compleja.

b) Desarrollar capacidad de razonamiento lógico.

c) Desarrollar capacidad para interpretar, plantear y resolver problemas aplicando los conceptos de función, límite, derivada e integral abstracta.

d) Asimilar conceptos básicos sobre la teoría de medibilidad y medida.

e) Conocer conceptos básicos del análisis funcional mediante el estudio de los espacios de Lebesgue y adquirir un adecuado dominio de los mismos.

f) Aplicar los conceptos adquiridos a la resolución de problemas que los requieran.

g) Lograr expresar con claridad sus ideas.

h) Adquirir hábitos de trabajo individual y en equipo.

i) Utilizar la herramienta computacional como recurso facilitador del cálculo y la representación gráfica, como así también para su producción escrita.

j) Manejar de manera significativa los temas que figuran en el programa analítico; es decir, que comprenda los temas desarrollados de modo de aplicarlos con acierto y en la resolución de problemas. Que sea capaz de modelizar situaciones problemáticas, de predecir resultados y verificar los mismos.

Contenido Temático

Unidad 1. LOS NÚMEROS REALES.

1.1 El sistema de los números reales. Cuerpos. Cuerpos ordenados. Cuerpos ordenados completos. Representación decimal de los números reales.

1.2 El espacio métrico R. Topología métrica de R. Convergencia. Densidad. Separabilidad. Sucesiones. Sucesiones de Cauchy. Completitud. Conjuntos acotados. Supremo e ínfimo. Compacidad. Conjunto de Cantor.

1.3 El sistema de los números reales extendidos. El conjunto R extendido. Operaciones. Relación de orden. Supremo e ínfimo. Punto límite. Límite superior y límite inferior.

Unidad 2. FUNCIONES REALES. CONTINUIDAD.

2.1 Funciones reales. Límite en un punto. Límites infinitos y al infinito. Límite superior e inferior de una función.

2.2 Continuidad. Propiedades de las funciones continuas. Continuidad uniforme.

Unidad 3. MEDIBILIDAD.

3.1 Sigma álgebra. Espacios medibles. Generación de sigma álgebras. Conjuntos de Borel.
3.2 Funciones medibles. Funciones medibles a valores reales y a valores reales extendidos. Funciones medibles a valores complejos.

Unidad 4. MEDIDAS.
4.1 Medidas. Medidas positivas. Espacios con medida. Aplicaciones entre espacios con medida. Medidas con signo. Generación de medidas. Medidas exteriores. Medida inducida por una medida exterior. Condición de Carathéodory.
4.2 La medida de Lebesgue en R. Construcción de la medida de Lebesgue. La clase de los conjuntos medibles Lebesgue. La clase de las funciones medibles Lebesgue.

Unidad 5. INTEGRACIÓN ABSTRACTA
5.1 La integral. La integral de funciones simples no negativas. La integral de funciones medibles no negativas.
5.2 Funciones integrables. Funciones integrables a valores reales. Funciones integrables a valores complejos. El rol de los conjuntos de medida nula. Funciones integrables definidas para casi todo punto.
5.3 Integrales que dependen de un parámetro. Continuidad de una integral con respecto a un parámetro. Derivabilidad de una integral con respecto a un parámetro.
5.4 Integración sobre espacios producto. Medida producto. Secciones de conjuntos y de funciones medibles en espacios producto. El teorema de Fubini.
5.5 La integral de Lebesgue en R. Definición de la integral. Comparación con la integral de Riemann. Condición de integrabilidad de Riemann. La integral de Lebesgue y las integrales impropias de Riemann.
5.6 Derivación e integración. Funciones monótonas. El teorema de Lebesgue sobre derivabilidad de funciones monótonas. Funciones de variación acotada. Derivada de una función integral. Funciones absolutamente continuas. Reconstrucción de una función a partir de su derivada.

Unidad 6. LOS ESPACIOS DE LEBESGUE L^p
6.1 Introducción al análisis funcional en espacios de Banach. Normas. Espacios Normados. Métrica inducida por una norma. Convergencia. Completitud. Espacios de Banach. Subespacios. Densidad. Sistemas completos. Transformaciones lineales. Álgebra de Banach.
6.2 Los espacios de Lebesgue. El espacio L^1. Los espacios L^p, 1<=p<inf. El espacio L^inf. Convergencia en L^p . Otros tipos de convergencia.
6.3 Convoluciones. Teoremas de Young. Convoluciones. El álgebra de convolución L1(Rn). Teoremas de Young. Teoremas de densidad. Separabilidad de los espacios L^p, 1<=p<inf.
6.4 El teorema de Radon-Nikodym. Espacios duales de los espacios L^p. Espacios duales de los espacios L^p. El teorema de representación de Riesz. Duales de los espacios L^p.

Para esta actividad curricular se consideran también los siguientes contenidos:
Procedimentales:
• Ejemplificación con entes matemáticos que cumplen y no cumplen con ciertas condiciones.
• Validación de proposiciones matemáticas.
• Contrastación de situaciones, analizando semejanzas y diferencias.
• Demostración de propiedades.
• Elaboración de conjeturas a partir de la observación de regularidades.
• Comunicación en forma oral y escrita de los procedimientos de resolución de problemas.

Actitudinales:
• Independencia y autonomía en el pensamiento.
• Capacidad para tomar decisiones y aceptar responsabilidades.
• Valoración de la investigación como fuente de conocimiento y aprendizaje.
• Curiosidad, apertura, duda, en relación a los conceptos y procedimientos con los que actúa.
• Valoración de la Matemática como fuente de construcción humana.
• Valoración del aporte de los contenidos matemáticos a las distintas áreas y a las distintas situaciones de la vida

cotidiana.
• Valoración del papel central del pensamiento crítico en el desarrollo de las ciencias.
• Valoración de las posibilidades y limitaciones del pensamiento científico.
• Valoración de los diferentes lenguajes que posibilitan la expresión y la comunicación.
• Valoración del intercambio plural de ideas en la elaboración de conocimientos y como fuente de aprendizaje, y flexibilidad y respeto hacia el pensamiento y producciones ajenas.
• Seguridad para sostener sus ideas, creencias y los productos de su actividad, y disponibilidad y flexibilidad para revisar los propios puntos de vista y las propias producciones.
• Autonomía, creatividad y perseverancia en el planteo y la búsqueda de soluciones a los problemas, en la toma de decisiones y en el diseño y concreción de proyectos.
• Valoración de la importancia del aprendizaje permanente.
• Responsabilidad y cuidado en el uso de los instrumentos y equipamiento que se emplea en el aprendizaje.

Modalidades de enseñanza-aprendizaje

La actividad curricular alternará distintas instancias:
Una instancia con un mayor protagonismo del docente quien sobre la base de un material didáctico disponible y en permanente interacción con los alumnos destaca la importancia de cada tema, presenta definiciones, enuncia y/o prueba propiedades relevantes y analiza ejemplos simples que faciliten la comprensión y conceptualización.
Una segunda instancia con un mayor protagonismo de los alumnos, quienes en grupos (de dos o tres) trabajan sobre una guía de ejercicios y problemas, con el soporte de los docentes quienes interaccionan constantemente con cada grupo fomentando la discusión entre sus miembros y reorientando sus iniciativas.
Asimismo los docentes fijan una hora semanal de consulta en la que aclaran aquellos conceptos y problemas en los que los alumnos hayan encontrado dificultades. El lugar y horario de las mismas se publican en el transparente del Departamento de Matemática y en la lista de correo electrónico euclides.

De esta manera se busca construir conocimientos bien estructurados, en un contexto motivacional adecuado, sobre la base de la actividad del alumno en interacción con otros y abordando problemas debidamente contextualizados.
En este contexto el docente adopta el rol de facilitador, reforzando la confianza de los alumnos en su capacidad de aprendizaje y resolución de problemas; pero también actúa de observador y evaluador, detectando y ayudando a superar dificultades, proporcionando de este modo retroalimentación sobre el desarrollo del trabajo grupal.

De desarrollarán clases de tipo teórico-prácticas. En las clases de teoría de manera alternada se expondrán algunos temas en el pizarrón y para otros temas se realizará una lectura conjunta de textos suministrados o bilbiografía recomendada por la cátedra.
En las prácticas se realizarán actividades para la resolución de problemas y ejercicios de manera socializada en el grupo-clase y de manera individual o en pequeños grupos.

Actividades de Formación Práctica

Las actividades de Formación Práctica tienen un mayor protagonismo de los alumnos, quienes en grupos (de dos o tres) trabajan sobre una guía de ejercicios y problemas, con el soporte de los docentes quienes interaccionan constantemente con cada grupo fomentando la discusión entre sus miembros y reorientando sus iniciativas. En estas prácticas se realizarán actividades para la resolución de problemas y ejercicios de manera socializada en el grupo-clase y de manera individual o en pequeños grupos.

Nº	Título	Descripción
1	Los números reales.	Consiste en un conjunto de ejercicios de diversa complejidad. Comenzando por el estudio de subconjuntos del espacio topológico de los números reales, siguiendo con ejercicios de supremo e ínfimo, conjuntos acotados, sucesiones, finalizando con límites inferior y superior.
2	Funciones reales. Continuidad.	Consiste en un conjunto de ejercicios de complejidad creciente. Comenzando por el estudio de funciones definidas a partir de otras dadas, como función parte positiva, parte negativa, función máximo o mínimo entre dos funciones, función valor absoluto de una función. Siguiendo con ejercicios sobre continuidad de funciones, límites inferior y superior en un punto, monotonía de funciones, uniforme continuidad, finalizando con ejercicios sobre semicontinuidad inferior y superior de funciones.
3	Medibilidad.	Consiste en un conjunto de ejercicios de complejidad creciente. Comenzando por el estudio de álgebra y sigma-álgebra de conjuntos, sucesión de conjuntos, límite inferior y superior de una sucesión de conjuntos, clase monótona de conjuntos, familia generadora, álgebra de Borel, Boreleanos. Siguiendo con el estudio de funciones medibles, funciones medibles Borel, finalizando con operaciones entre funciones medibles.
4	Medidas.	Consiste en un conjunto de ejercicios de diversa complejidad. Comenzando por el estudio de espacios con medida, medida inducida, medida finita, medida completa. Siguiendo con ejercicios sobre medida de Lebesgue, medida exterior, medida de probabilidad y convergencia en medida.
5	Integración.	Consiste en un conjunto de ejercicios de complejidad creciente. Comenzando por el estudio de la integral abstracta para funciones simples, continuando con funciones integrables más generales. Siguiendo con ejercicios sobre sucesiones de funciones integrables, lema de Fatou, Teorema de Beppo-Levi y de convergencia dominada, integral de funciones a valores reales y complejos, integración sobre espacio producto, Teorema de Fubini, integral de Lebesgue en R, Teorema de Beppo-Levi, de la convergencia dominada y de la convergencia monótona, integrales que dependen de un parámetro. Finalizando con ejercicios sobre derivación e integración.
6	Nociones sobre espacios normados. Los espacios de Lebesgue Lp.	Consiste en un conjunto de ejercicios de diversa complejidad. Comenzando con ejercicios sobre espacios normados, normas y seminormas, convergencia en espacios normados, espacios de Banach. Finalizando con ejercicios sobre los espacios de Lebesgue L^p (1<=p<=inf), distintos tipos de convergencia de sucesiones de funciones en L^p , en norma, en medida, casi todo punto y otros tipos de convergencia.

Evaluación

Se combinarán actividades de evaluación sumativa con actividades de evaluación formativa y continua. Esta última estará integrada a las actividades de enseñanza y aprendizaje y le permitirá al alumno conocer sus logros y dificultades y al docente, de ser necesario, reorientar la enseñanza de manera rápida y eficaz.

En cuanto a las actividades de evaluación sumativa:

Se realizan tres evaluaciones parciales de tipo teórico-práctico-conceptual. Comprenden el manejo de definiciones, propiedades, teoremas y la resolución de problemas y ejercicios.
Parcial n°1: se evaluarán los temas de las unidades 1, 2 y 3. (Aprox. en la semana 5)
Parcial nº 2: se evaluarán los temas de la unidad 4 y parte de la unidad 5. (Aprox. en la semana 10)
Parcial nº 3: se evaluarán los temas restantes de la unidad 5 y la unidad 6 completa. (Aprox. en la semana 15)

1. El alumno que apruebe los parciales con una nota superior a 5 y un promedio de los tres parciales superior a 6 alcanzará la condición de alumno regular, y para acreditar Funciones Reales deberá realizar en las mesas de exámenes una evaluación práctica que deberá aprobar con nota superior a 6 y realizará luego un coloquio final globalizador, que deberá aprobar con nota superior a 6. La aprobación de las dos instancias implica la acreditación de la asignatura.
2. El alumno que apruebe los parciales con una nota superior a 7 y un promedio de los tres parciales superior a 8 alcanzará la condición de alumno regular (promovido), teniendo la posibilidad de realizar en la semana 16 un coloquio final globalizador, que deberá aprobar con nota superior a 6 para acreditar la asignatura. Si lo aprueba acredita Funciones Reales, si no lo aprueba deberá repetir en las mesas de exámenes del turno noviembre-diciembre (inmediato posterior) la instancia del coloquio. De no aprobar el coloquio (en las mesas de noviembre-diciembre) el alumno mantendrá de todas maneras la condición de alumno regular y para acreditar la asignatura procederá como en el ítem 1.
3. El alumno que no apruebe uno de los tres parciales, deberá realizar en la semana 16 una evaluación recuperatoria con los temas correspondientes al parcial no aprobado. Si aprueba esta evaluación práctica recuperatoria, alcanza la condición de alumno regular, y para acreditar la asignatura procederá como en el ítem 1. Si no aprueba esta evaluación práctica queda en condición de alumno libre.
4. El examen para el alumno con condición libre consta de una primera instancia escrita de práctica, que deberá aprobarse, con nota superior a 6, para acceder a la segunda instancia sobre fundamentos teóricos, que deberá aprobarse con nota superior a 6, y finalmente un coloquio final globalizador, que también deberá aprobar con nota superior a 6. La aprobación de las tres instancias implica la acreditación de la asignatura.

Distribución de la carga horaria

Presenciales

Teóricas		55	Hs.
Prácticas	Prácticas en gabinetes y/o laboratorios	0	Hs.
	Trabajo de campo	0	Hs.
	Resolución de Problemas y Ejercicios	35	Hs.
	Problemas abiertos vinculados a la profesión	0	Hs.
	Prácticas vinculadas a las TIC	5	Hs.
	Actividades de Proyecto y Diseño	0	Hs.
	Práctica Profesional Supervisada	0	Hs.
Evaluaciones		10	Hs.
	Total	**105**	**Hs.**

Dedicadas por el alumno fuera de clase

Preparación Teórico-Práctica	100	Hs.
Elaboración y redacción de informes, trabajos, presentaciones, etc.	5	Hs.
Total	**105**	**Hs.**

Bibliografía básica

Título	Autores	Editorial	Año	Ejem.
The Elements of Integration	Bartle R.G.	John Wiley and Sons, Inc.	1966	2

Real Analysis	Royden H.L.	The Macmillan Company	1970	2
Real and Complex Analysis	Rudin W.	McGraw-Hill Book Company	1966	2
A First Course in Real Analysis	Berberian S.K.	Springer-Verlag	1994	1
The Real Numbers and Real Analysis	Bloch E.D.	Springer-Verlag	2011	1
Medida e Integral de Lebesgue	Fava N., Zo F.	Red Olímpica	1996	2

Bibliografía complementaria

Título	Autores	Editorial	Año	Ejem.
Fundamentos del Análisis Moderno	Dieudonne J.	Reverté	1966	1
Measure Theory	Halmos P.R.	D.Van Nostrand Company, Inc.	1959	1
Theory of Functions of a Real Variable	Natanson I.P.	F.Ungar Publishing Co.	1960	1
Cálculo Infinitesimal	Spivak M.	Reverté	2003	4
Introduction to Real Analysis	Trench W.F.	Free Edition	2011	1

Recursos web y otros recursos

En esta asignatura se trabaja principalmente con apuntes de cátedra, aunque también se recomienda una consulta permanente con la bilbiografía recomendada. Se dispone de uno por cada unidad de la asignatura y en ellos se incluyen las actividades prácticas propuestas (consignadas arriba) en formato digital o impreso. En algunas clases teórico-prácticas se realizan exposiciones orales utilizando los recursos de las aulas: pizarrón, fibrón y eventualmente para algunas exposiciones especiales se utiliza una pc con cañón proyector.
La cátedra mantiene fluida comunicación con los alumnos por correo electrónico, a través del mismo se envían los archivos digitales de los apuntes y trabajos prácticos, como así también toda información referente a horarios y lugar de consulta, fechas de parciales y resultados de las evaluaciones.
Además los alumnos reciben información de otros temas relacionados con la carrera inscribiéndose en la lista de correo electrónico euclides.

Cronograma de actividades

Semana	Unidad	Tema	Actividad
1	1	El número real. Espacios métricos. R extendido, límites superior e inferior	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 1.
2	2	Funciones reales. Límite en un punto. Límites infinitos y al infinito. Límite superior e inferior de una función	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 2.
3	2	Continuidad. Propiedades de las funciones continuas. Continuidad uniforme.	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 2.
4	3	Sigma álgebra. Espacios medibles. Generación de sigma álgebras. Conjuntos de Borel.	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 3.
5	3	Funciones medibles. Funciones medibles a valores reales y a valores reales extendidos. Funciones medibles a valores complejos	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 3. Primer parcial
6	4	Medidas. Medidas positivas. Espacios con medida. Aplicaciones entre espacios con medida.	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 4.
7	4	Medidas con signo. Generación de medidas. Medidas exteriores. Medida inducida por una medida exterior. Condición de Carathéodory.	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 4.
8	4	La medida de Lebesgue en R. Construcción de la medida de Lebesgue. La clase de los conjuntos medibles Lebesgue. La clase de las funciones medibles Lebesgue.	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 4.
9	5	La integral. La integral de funciones simples no negativas. La integral de funciones medibles no negativas. Funciones integrables. Funciones integrables a valores reales. Funciones integrables a valores complejos. El rol de los conjuntos de medida nula. F	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 5.
10	5	Integrales que dependen de un parámetro. Continuidad de una integral con respecto a un parámetro. Derivabilidad de una integral con respecto a un parámetro. Integración sobre espacios producto. Medida producto. Secciones de conjuntos y de funciones medibl	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 5. Segundo parcial.
11	5	La integral de Lebesgue en R. Definición de la integral. Comparación con la integral de Riemann. Condición de integrabilidad de Riemann. La integral de Lebesgue y las integrales impropias de Riemann.	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 5.

12	5	Derivación e integración. Funciones monótonas. El teorema de Lebesgue sobre derivabilidad de funciones monótonas. Funciones de variación acotada. Derivada de una función integral. Funciones absolutamente continuas. Reconstrucción de una función a partir d	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 5.
13	6	Introducción al análisis funcional en espacios de Banach. Normas. Espacios Normados. Métrica inducida por una norma. Convergencia. Completitud. Espacios de Banach. Subespacios. Densidad. Sistemas completos. Transformaciones lineales. Álgebra de Banach.	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 6.
14	6	Los espacios de Lebesgue. El espacio L^1. Los espacios L^p, 1<=p<inf. El espacio L^inf. Convergencia en L^p . Otros tipos de convergencia. Convoluciones. Teoremas de Young. Convoluciones. El álgebra de convolución L^1(R^n). Teoremas de Young.	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 6.
15	6	Espacios duales de los espacios L^p. Teorema de Radon-Nikodym. Espacios duales de los espacios L^p. El teorema de representación de Riesz.	Clases teórico-prácticas. Trabajo sobre la práctica Nº 6. Tercer parcial.